

7 VYUŽITÍ METOD OPERAČNÍ ANALÝZY V TECHNOLOGII DOPRAVY

Operační analýza jako jedna z oblastí aplikované matematiky nachází své široké uplatnění v průmyslových a ekonomických aplikacích. Jedním z oborů, ve které hraje nezastupitelnou úlohu, je také doprava. V železniční dopravě, s ohledem na její stochastický charakter, nacházejí své využití zejména metody teorie hromadné obsluhy.

Ukažme si nyní jednu možnost jak teorii hromadné obsluhy využít při modelování provozu vjezdového kolejiště seřaďovací stanice.

Při řešení provozních charakteristik budeme vjezdovou skupinu kolejí v seřaďovací stanici považovat za systém hromadné obsluhy s odmítáním s následujícími podmínkami :

a) vstupní tok vlaků je elementární, tj. platí pro něj :

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \text{pro } \lambda, t > 0$$

b) doba pobytu soupravy ve vjezdové skupině je spojitá náhodná proměnná s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti, charakterizovaná hustotou pravděpodobnosti

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad \text{pro } \mu, t > 0$$

c) ve vjezdovém kolejišti pracuje n obslužných linek,

d) v kolejišti platí řádný režim fronty (bez priorit)

Základem pro odvození provozních charakteristik kolejiště jsou Erlangovy vzorce pro výpočet pravděpodobností jednotlivých stavů systému (stav systému = počet vlaků ve vjezdovém kolejišti)

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \quad \text{pro } k = 1, \dots, n$$

nebo vyjádřeno pomocí pravděpodobnosti P_0

$$P_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k P_0 \quad \text{pro } k = 1, \dots, n$$

Přechod mezi vzorcí pro výpočet pravděpodobností P_k pomocí pravděpodobností P_{k-1} a P_0 je založen na následující úvaze

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \frac{1}{1!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 = \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0$$

.....

tedy pro pravděpodobnost P_n musí platit

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0$$

Zbývá vypočítat pravděpodobnost P_0 , tu zjistíme ze známé podmínky

$$\sum_k P_k = 1$$

po rozepsání máme

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$
$$P_0 + \frac{1}{1!} \frac{\lambda}{\mu} P_0 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = 1$$

a po závěrečné úpravě

$$P_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k = 1$$

tedy lze pro P_0 psát

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}$$

Z provozních charakteristik má význam počítat :

- pravděpodobnost odmítnutí vlaku,
- střední počet obsazených kolejí,
- využití jedné koleje.

Pravděpodobnost odmítnutí vlaku

Vlak budeme odmítat v okamžiku, kdy je kolejiště plně obsazeno, tj. v okamžiku, kdy se v kolejišti nachází n vlaků. Tento stav nastane s pravděpodobností P_n . Pro pravděpodobnost

odmítnutí P_{odm} lze tedy psát

$$P_{odm} = P_n$$

Střední počet obsazených kolejí

Okamžitý počet vlaků v kolejišti je diskrétní náhodná proměnná. Označíme počet vlaků v kolejišti jako S . Střední počet obsazených kolejí odvodíme ze základní definice střední hodnoty diskrétní náhodné proměnné, tj. ze vztahu

$$ES = \sum_s s \cdot P_s$$

nebo také

$$ES = \sum_{s=0}^n s \cdot P_s$$

Výsledný vztah dostaneme po následující úpravě

$$\begin{aligned} ES &= \sum_{s=1}^n s \cdot P_s = \sum_{s=1}^n s \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 = \sum_{s=1}^n s \frac{1}{s(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{s=1}^n \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1} P_0 = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1}) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - P_n) \end{aligned}$$

Využití jedné koleje

Využití jedné koleje získáme, podělíme-li střední počet obsazených kolejí počtem kolejí ve vjezdové skupině, tedy ze vztahu

$$\frac{ES}{n}$$

Řešený příklad

Vjezdové kolejiště má 4 koleje. Střední počet vlaků vstupujících do vjezdové skupiny je 6 vlaků za hodinu. Střední doba obsluhy jednoho vlaku činí 30 minut. Vypočítejte pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému a provozní charakteristiky vjezdového kolejiště.

Zadané hodnoty

$$n = 4$$

$$\lambda = 6 \text{ vlaků} \cdot \text{hod}^{-1}$$

$$\frac{1}{\mu} = 0,5 \text{ hod. vlak}^{-1}$$

Řešení

Pro výpočet tohoto typu příkladu se doporučuje použít přehledného tabelárního způsobu.

Je logické, že při výpočtu nelze použít Erlangovy vzorce ve tvaru, jak jsme si je uvedli dříve, protože neznáme žádnou z pra děpodobností.. Proto zavádíme při řešení substituci

$$q_k = \frac{P_k}{P_0} \text{ (sloupec 2), která nám umožní tento nedostatek odstranit.}$$

Máme

$$q_k = \frac{P_k}{P_0} = \frac{\frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0}{P_0} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

Pravděpodobnosti jednotlivých vztahů (sloupec 3) pak získáme

$$P_k = q_k P_0$$

přičemž nejdříve vypočítáme pravděpodobnost P_0

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n q_k}$$

Součtem hodnot ve sloupci 4 získáme střední počet vlaků v kolejišti.

Tab. č. 7. 1

k	q_k	P_k	$k \cdot p_k$
1	2	3	4
0	1	0,061	0
1	3	0,183	0,183
2	4,5	0,274	0,548
3	4,5	0,274	0,822
4	3,375	0,206	0,824
Σ	16,375	0,998	2,377

Pravděpodobnost odmítnutí vlaku

$$P_{odm} = P_n = \mathbf{0,206}$$

Ke střednímu počtu vlaků ve vjezdovém kolejišti se lze dopracovat i dosazením do vzorce

$$ES = \frac{\lambda}{\mu} (1 - P_n) = 6.0,5(1 - 0,206) = \mathbf{2,382}$$

Nepatrný rozdíl v obou výsledcích je způsoben zaokrouhlováním v tabulce 7.1.

Využití jedné koleje ze vztahu

$$\frac{ES}{n} = \frac{2,382}{4} = \mathbf{0,5955 = 59,55\%}$$

Řešený příklad

Vjezdové kolejiště, které má 6 kolejí a obsluhuje jeden vlak průměrně za 1,5 hodiny má pracovat tak, aby neodmítalo 1% nabídek vlaků za den. Stanovte maximální počet vlaků, který je seřadovací stanice schopna přijmout.

Zadané hodnoty

$$n = 6$$

$$\frac{1}{\mu} = 1,5 \text{ hod. vlak}^{-1}$$

$$P_n = 0,01$$

Řešení

Při řešení využijeme tabelovaných hodnot $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ pro vybrané pravděpodobnosti a počty linek.

Tab. č. 7.2

$n \setminus P_n$	0,05	0,01
1	0,053	0,010
2	0,381	0,153
3	0,899	0,455
4	1,525	0,87
5	2,223	1,361
6	2,96	1,909
7	3,738	2,501
8	4,543	3,127
9	5,37	3,783
10	6,216	4,461

Ve sloupci pro pravděpodobnost odmítnutí $P_n = 0,01$ a počet linek $n = 6$ vyhledáme hodnotu β . Zadaným hodnotám odpovídá

$$\beta = 1,909$$

ze vztahu $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ při známé střední době obsluhy $\frac{1}{\mu}$ vypočítáme hodnotu λ .

$$\lambda = 1,2726 \text{ vlaků. hod}^{-1} = 30,54 \text{ vlaků. 24 hod}^{-1} \approx \mathbf{30 \text{ vlaků. 24 hod}^{-1}}$$

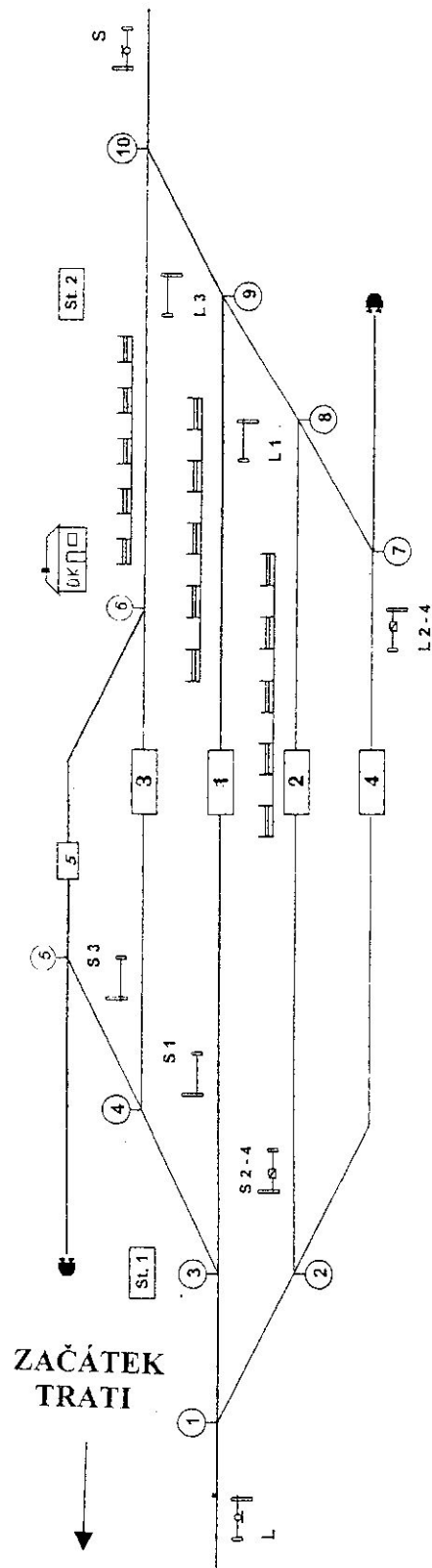
V mnoha dalších typech příkladů se využívá tabulky obsahující pravděpodobnosti odmítnutí pro určitý počet linek a vybrané hodnoty zatížení systému β . Z tohoto důvodu považujeme za účelné tuto tabulku publikovat.

Tab. č. 7.3

$\beta \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
,20	0	,0164	,0011	,0001	0	0	0	0	0	0
,40	0	,0541	,0072	,0007	,0000	0	0	0	0	0
,60	0	,1011	,0198	,0030	,0004	,0000	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
,80	,1505	,0387	,0077	,0012	,0002	,0000			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
,00	,2000	,0625	,0154	,0031	,0005	,0001			
1		0	0	0	0	0	0	0	0
,20		,0898	,0262	,0063	,0012	,0002	,0000		
1		0	0	0	0	0	0	0	0
,40		,1192	,0400	,0111	,0026	,0005	,0001		
1		0	0	0	0	0	0	0	0
,60		,1496	,0565	,0177	,0047	,0011	,0002		
1		0	0	0	0	0	0	0	0
,80		,1803	,0750	,0263	,0078	,0020	,0005	,0000	
2		0	0	0	0	0	0	0	0
,00		,2105	,0952	,0367	,0121	,0034	,0009	,0001	
2			0	0	0	0	0	0	0
,20			,1166	,0488	,0176	,0055	,0015	,0005	,0000
2			0	0	0	0	0	0	0
,40			,1387	,0624	,0244	,0083	,0025	,0005	,0001
2			0	0	0	0	0	0	0
,60			,1612	,0773	,0324	,0119	,0039	,0009	,0002
2			0	0	0	0	0	0	0
,80			,1837	,0933	,0417	,0164	,0057	,0015	,0004
3			0	0	0	0	0	0	0
,00			,2061	,1101	,0522	,0219	,0081	,0027	,0008
3				0	0	0	0	0	0
,20				,1274	,0636	,0283	,0112	,0040	,0013
3				0	0	0	0	0	0
,40				,1452	,0760	,0356	,0149	,0056	,0019
3				0	0	0	0	0	0
,60				,1631	,0891	,0438	,0193	,0077	,0028
3				0	0	0	0	0	0
,80				,1811	,1029	,0529	,0245	,0102	,0039
4				0	0	0	0	0	0
,00				,1991	,1172	,0627	,0304	,0122	,0053
4				0	0	0	0	0	0
,50				,2218	,1542	,0902	,0483	,0236	,0105
5					0	0	0	0	0
,00					,1918	,1205	,0700	,0375	,0184

5	0	0	0	0	0
,50	,2282	,1525	,0949	,0548	,0293
6		0	0	0	0
,00		,1851	,1219	,0751	,0431
6		0	0	0	0
,50		,2168	,1501	,0978	,0598
7			0	0	0
,00			,1788	,1221	,0787



Poř. č.	Název činnosti	Funkce	Časovy normativ [min.úh. ⁻¹]	Trvání činnosti [min]	0	10	20	30	40	50	60	70	80
1.	Převzetí průvodních listin	TRZ. vnější	1	1									
2.	Odevzdání obalu s průvodními listinami na pracovišti VPK	TRZ. vnější	1	1									
3.	Převzetí průvodních listin	TRZ. vnitřní	1	1									
4.	Přezkoušení průvodních listin	TRZ. vnitřní	0,7	12,6									
5.	Příprava určovacích nálepek pro místní vozy (s průvodními listinami)	TRZ. vnitřní	0,36	0,36									
6.	Příprava určovacích nálepek pro místní vozy (bez průvodních listin)	TRZ. vnější	0,36	0									
7.	Přepravní prohlídka	TRZ. vnější	0,51	10,71									
8.	Sepsání třídenky	TRZ. třídenkař	1,1 0,91	22,53									
9.	Doručení třídenky na pracoviště zúčastněná na rozřazení soupravy	TRZ. třídenkař	2	6									
10.	Technická prohlídka za vjezdu vlaku	2 vozmistři	5	5									
11.	Technická prohlídka po zastavení vlaku	2 vozmistři	0,8	37									
12.	Odvěšení vlakové lokomotivy	posunovač přípravář	0,65	0,65									
13.	Rozpojení brzdových spojek, povolení šroubovek	posunovač přípravář	0,43	6,02									
14.	Sejmutí koncové návěsti, hlášení o ukončení přípravy k rozřazení	posunovač přípravář	1	1									

Poř. č.	Název činnosti	Funkce	Časový normativ [min.ú.k ⁻¹]	Trvání činnosti [min]	0	20	40	60	80	100	120	140	160
1.	Svěšení nákladních vozů	POS-PŘI	0,61	12,2									
2.	Označení konce vlaku	POS-PŘI	0,8	0,8									
3.	Přivěšení vlakové lokomotivy	POS-PŘI	0,71	0,71									
4.	Technická prohlídka	VZM	0,8	72									
5.	Úplná zkouška brzdy	VZM	55	55									
6.	Přepravní prohlídka	TRZ	0,51	25,5									
7.	Sepsání výkazu vozidel	TRZ-PŘI	0,5	25									
8.	Příprava vlakové dokumentace	TRZ-PŘI	5	5									
9.	Příprava průvodních listin	TRZ	0,41	15,58									
10.	Předání vlak. dokumentace s průvodními listinami	TRZ-PŘI	1	1									

